بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر دانشکده مهندسی پزشکی	مبحث: آزمون فرض و رگرسیون	درس آمار حیاتی
ارائه: دکتر مهرداد ساویز		تمرین

۱- یک دانشجوی مهندسی پزشکی در رساله کارشناسی خود برای اولین بار به دنبال برآورد شدّت میدان الکتریکی طبیعی جوّی (مرتبط با فیزیولوژی بدن انسان) در مکان مشخصی در روستایی در خراسان جنوبی است. دستگاهی که دانشکده مهندسی پزشکی در اختیار او قرار داده خطایی دارد که می‌توان آن را دارای توزیع نرمال با میانگین صفر در نظر گرفت (که در نتیجه در تعداد بی‌شمار زیاد اندازه‌گیری که «جمعیت» مسئله ما به شمار می‌رود، میانگین اندازه‌گیری‌ها با مقدار واقعی یکی می‌گردد) امّا واریانس ناشی از دستگاه اندازه‌گیری نامعلوم است. با توجه به دشواری‌های کار، او توانسته است نمونه‌ای شامل تنها پنج اندازه‌گیری به شرح زیر بردارد:

$E\ (V/m)$	۱۱۰	۱۱۱	۱۰۹	۱۱۳	۱۰۷

اکنون او مایل است نتیجه را به صورت یک بازه با اطمینان ۹۵٪ بیان کند.

الف) بازه قابل بیان برای شدّت میدان چیست؟

ب) بازه مقادیر قابل تصور برای خطای دستگاه اندازه گیری با سطح اطمینان ۹۵٪ چیست؟

ج) اگر او می خواست بدون تغییر دستگاه نتیجه خود را با عدم قطعیت کمتری (بازه کوچکتر) بیان کند بایستی چه می‌کرد؟

۲- یکی از مسئولین هواشناسی کشور احتمال می‌دهد که دمای متوسط سالانه هوا (احتمالاً به علّت آثار گازهای مخرّبی که کشورهای صنعتی در جو زمین رها می‌کنند) در سال‌های اخیر افزایش یافته است. او برای نشان دادن صحت این فرض، می‌خواهد میانگین دماهای ثبت شده در اول فروردین ۹ سال اخیر را با میانگین دمای ثبت شده همان روز در ۱۰۰ سال اخیر مقایسه نماید. اگر میانگین دماهای ۹ سال اخیر برابر با ۲۲ درجه سانتی‌گراد و میانگین ۱۰۰ ساله دما برابر ۲۱ درجه سانتی گراد باشد و انحراف معیار دماها ۶ درجه سانتی گراد باشد، (توزیع دماها نرمال فرض می‌شوند و فرض می‌شود واریانس دماها ثابت مانده باشد- دقت کنید که ۱۰۰ سال خیلی بزرگتر از ۹ سال است...):

الف) آیا او می‌تواند بر اساس این نمونه‌ها فرض خود را با سطح اطمینان ۹۵٪ تأیید نماید و افزایش یک درجه‌ای فوق را ناشی از افزایش متوسط دمای زمین (و نه تغییرپذیری نمونه‌ای) قلمداد نماید؟ (با تشکیل آزمون فرض و محاسبه پاسخ داده شود)

ب) اگر او احتمال دهد که اختلاف میانگین واقعاً در حدود یک درجه است، بایستی حداقل چند نمونه دما (n) در نه سال اخیر استخراج کند (مثلاً روزهای بیشتری در هر سال در نظر بگیرد) تا بتواند ادعای خود را به لحاظ آماری تأیید نماید؟

ج) به طور کلّی اگر بخواهیم تفاوت‌های دمایی k برابر ظریف‌تر (یعنی کوچک‌تر) را با روش آماری **تشخیص** دهیم بایستی چند برابر نمونه برداریم؟ (مراحل ریاضی رسیدن به جواب درج گردد) آیا این جمله صحیح است که: «برای دوبرابر کردن دقّت تشخیص در برخی آزمایش‌های آماری، هزینه آزمون ممکن است حدوداً چهار برابر شود».

۳- عبارات زیر را نقد نمایید.

(**الف**) در یک مسئله مشخص، بازه اطمینان ۹۵٪ بزرگ‌تر از بازه اطمینان ۹۰٪ است.

(**ب**) اگر یک بازه اطمینان ۹۵٪ شامل ۰/۷ باشد، بازه ۹۹٪ هم شامل ۰/۷ هست.

(**ج**) در برآورد بازه‌ای تفاضل میانگین دو جمعیت، نتیجه $\mu_1-\mu_2 \in (-0.6, +1.2)$ با سطح اطمینان ۹۵٪ به دست آمده است. آزمون فرضی که برای بررسی ادعای **عدم تساوی میانگین همین دو جمعیت** با همین سطح اطمینان انجام شود چه شکلی دارد و آیا در مورد نتیجه آن چه می‌توان گفت؟

☐ $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. فرض خلف (یعنی H_0) را نمی‌توان رد کرد.

☐ $H_0: \mu_1 \neq \mu_2$, $H_1: \mu_1 = \mu_2$. فرض خلف (یعنی H_0) را می‌توان رد کرد.

☐ $H_0: \mu_1 \neq \mu_2$, $H_1: \mu_1 = \mu_2$. با این اطلاعات در مورد نتیجه آزمون فرض نمی‌توان چیزی گفت.

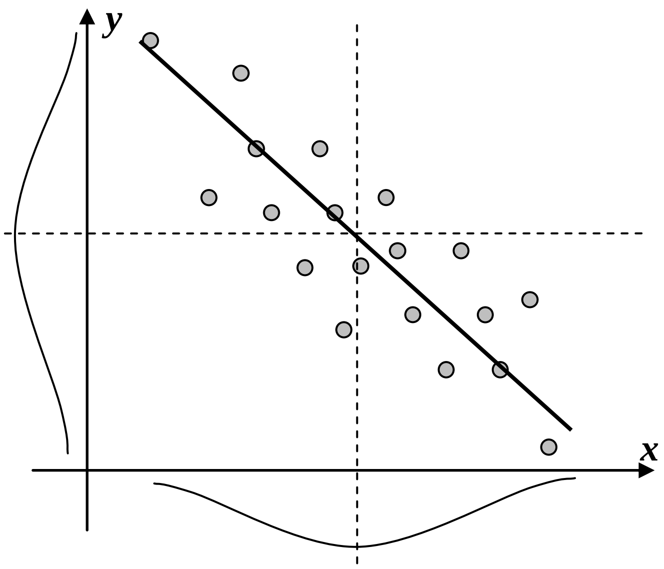
☐ $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. با این اطلاعات در مورد نتیجه آزمون فرض نمی‌توان چیزی گفت.

۴- یک کیسه بسیار بزرگ حاوی تعداد بسیار زیادی مهره است که نسبتی معادل p از این مهره‌ها سفید هستند. (به این تریب خروج مهره از این ظرف معادل یک آزمایش دوحالتی است). هدف ما آن است که با نمونه‌گیری به برآوردی از p برسیم. نمونه‌ای شامل $n =$ ۲۰۰ مهره از این کیسه بیرون کشیده می‌شود. مطلوبست:

الف) برآوردگری که بر اساس مشاهده نمونه، p را برآورد نماید چیست؟ اگر تعداد مهره سفید مشاهده شده در نمونه برابر ۴۰ باشد، برآورد p چقدر است؟

ب) این برآوردگر خود یک متغیر تصادفی است که از نمونه به نمونه تغییر می‌کند. میانگین و واریانس این برآوردگر با فرض معلوم بودن p چیست؟ بر این اساس چرا افزایش حجم نمونه می‌تواند منجر به برآورد دقیق‌تری از p شود؟

۵- یک داروی گیاهی مشخص از نظر اثر بر درد بررسی شده است. میزان درد (y بر حسب ساعت درد بعد از مصرف دارو) و میزان دارو (x بر حسب میلی گرم) برای یک نمونه بزرگ بررسی شده است و هم بستگی نمونه‌ای برابر(۰/۵ -) بین این دو کمیت مشاهده شده است. فرض می‌شود که هر دو کمیت توزیع نرمال دارند.



بر اساس فرمول‌های $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\rho}$ (انتهای برگه):

الف) چه رابطه کلّی بین $\hat{\beta}_1$ **و** $\hat{\rho}$ می‌توان نوشت؟

ب) اگر میزان درد ثبت شده در این ۳۰ نفر دارای انحراف معیار ۳ ساعت و میزان داروی ثبت شده دارای انحراف معیار ۳۰ میلی گرم باشد، ضریب شیب رگرسیون درد بر حسب میزان دارو ($\hat{\beta}_1$) چیست؟

ج) انتظار می‌رود اگر مصرف دارو به اندازه ۱۰ میلی‌گرم افزایش یابد، ساعات درد به طور متوسّط چقدر کاهش یابد؟

اکنون جدول زیر در مقاله‌ای که این تحقیق را در یکی از مجلات علوم پزشکی گزارش کرده است به چشم می‌خورد.

رگرسیون میزان درد بر عامل زیر	β_1	T	P
اثر دوز دارو (mg)	(☝ قسمت ب)	۳/۴۸	۰/۰۰۱

$R^2 = 0.25 \qquad F = 12.11 \qquad P_F < 0.001$

بر اساس مندرجات این جدول و نظرات خود شما:

د) مقدار P در این جدول به چه معناست؟ آیا نتایج آزمون T مبین معناداری نتایج آماری به دست آمده با سطحی بالاتر از ۹۵٪ هستند؟

هـ) میزان مصرف دارو چند درصد از تغییرات درد را **تبیین** می‌کند؟ به نظر شما آیا این رگرسیون ارزش عملی دارد؟ به نظر شما باقی این تغییرات می‌تواند ناشی از چه عواملی باشد؟

راهنمایی: آزمون T در مبحث رگرسیون به آزمون $H_1 : \beta_1 \neq 0 \,, H_0 : \beta_1 = 0$ اطلاق می‌شود و آزمون F به آزمون $H_1 : F > 0 \,, H_0 : F = 0$ که در آن $F = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{SSE \,/\, (n-2)}$ است اطلاق می‌شود. هر دو آزمون متناظر با قضاوت آماری درباره وجود یا عدم وجود رابطه خطی بین x وy هستند. در رگرسیون بر حسب یک عامل (مانند فوق)، این دو آزمون معادلند. در رگرسیون چند متغیری، آزمون F می‌تواند برای قضاوت در مورد معناداری کل مدل چندعاملی به کار گرفته شود در حالی که T تنها برای ضریب شیب هر عامل به تنهایی قابل استفاده است.

برخی از روابط و جداول توزیع تجمعی که ممکن است به کار آیند:

$$\hat{\rho} = \frac{\Sigma_{XY}}{\sqrt{\Sigma_{XX}\,\Sigma_{YY}}} \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma_{XY}}{\Sigma_{XX}} \quad , \ \Sigma_{XX} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad \Sigma_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$t_{\alpha}^{(n)}$		α										
		0.75	**0.8**	**0.85**	**0.9**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**	**0.9975**	**0.999**	**0.9995**
n	**1**	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
	2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
	3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
	4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
	5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869

جدول توزیع نرمال استاندارد										
z	**+0.00**	**+0.01**	**+0.02**	**+0.03**	**+0.04**	**+0.05**	**+0.06**	**+0.07**	**+0.08**	**+0.09**
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169

$$H_0:\mu=\mu_0 \quad H_1:\mu>\mu_0 \quad Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{1-\alpha}$$

$$H_0:\mu=\mu_0 \quad H_1:\mu\neq\mu_0 \quad Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad |Z|<z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$H_0:\mu=\mu_0 \quad H_1:\mu>\mu_0 \quad T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\alpha}^{(n-1)}$$

$$H_0:\mu_1-\mu_2=d_0 \quad H_1:\mu_1-\mu_2>d_0 \quad Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}>z_{1-\alpha}$$

$$\mu\in(\bar{x}\mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \qquad \mu\in(\bar{x}\mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$\mu_D\in(\bar{x}_1-\bar{x}_2\mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

$$\sigma^2\in(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}},\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}})$$

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\in(\frac{s_2^2}{s_1^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1),\frac{s_2^2}{s_1^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1))$$

$\chi_\alpha^2(n)$		α					
		0.005	**0.025**	**0.05**	**0.95**	**0.975**	**0.995**
n	**1**	0.000	0.001	0.0039	3.84	5.02	7.88
	2	0.01	0.0506	0.103	5.99	7.38	10.6
	3	0.072	0.216	0.352	7.81	9.35	12.8
	4	0.207	0.484	0.711	9.49	11.1	14.9
	5	0.412	0.831	1.15	11.1	12.8	16.7