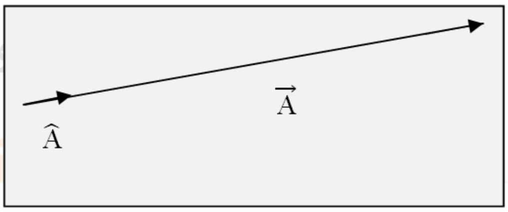
فصل اول

بردارهای پایه و دستگاههای مختصات

بردارهای یکه

بردار یکه، کمیت بدون بعدی است که فقط برای مشخص کردن جهت در فضا به کار می رود و انـدازه اش برابـر بـا واحد است. بردار یکه مشخص کننده جهت $\vec{A}$ را با $\hat{A}$ نمایش می دهند. در حالت کلی داریم:

$$\vec{A} = |\vec{A}|\,\hat{A}$$

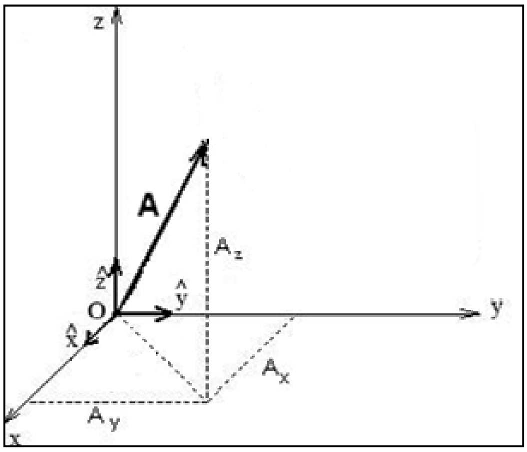


برای تمایز بردارهای یکه از دیگر بردارها یک علامت هت(^) بالای سر بردار یکه می گذاریم.

دستگاه مختصات دکارتی

انتخاب یک دستگاه مختصات در فضا الزاما انتخاب یک مجموعه از بردارهای پایه هم ارز است. اگر دستگاه مختصات دکارتی انتخاب کنیم (شکل زیر) بردارهای پایه ما به گونه ای انتخاب می شوند که در سه راستای ثابت دو به دو بر هم عمود باشند، این راستاهای ثابت x و y و z نامیده می شوند. هر نقطه در این دستگاه با (x,y,z) مشخص می شود. اگر یک بردار را با پیکانی نمایش دهیم، تصاویر عمودی پیکان مذکور روی سه محور مختصات مولفه های

دکارتی آن بردار در این راستاها نامیده می شوند. بردارهای یکه در راستای محورهای z,y,x به ترتیب با $\hat{z}, \hat{y}, \hat{x}$ مشخص می شوند. این بردارهای یکه مجموعه ای از بردارهای یکه مناسب و اساسی فراهم می آورند.



هر بردار **A** بر حسب بردارهای یکه دکارتی با رابطه زیر نمایش داده می شوند:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

اندازه بردار بر حسب این مولفه ها عبارت است از:

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)}$$

A_x, A_y, A_z به ترتیب مولفه های **A** در راستاهای x ,y ,z می باشند. بردار مکان **r** در این دستگاه عبارت است از:

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

المان حجم عبارت است از عنصر دیفرانسیلی سه بعدی کوچکی که از کنار هم چیدن آنها می توان حجمی از فضا را به وجود آورد. المان سطح یک بردار است که اندازه آن برابر با مساحت المان و جهت آن عمود بر آن است.

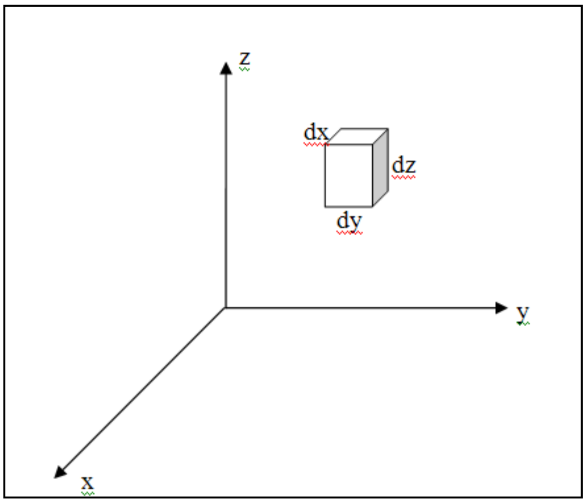
المان حجم در دستگاه دکارتی عبارت است از:

$$dv = dx.dy.dz$$

المانهای سطح در این حالت عبارتند از:

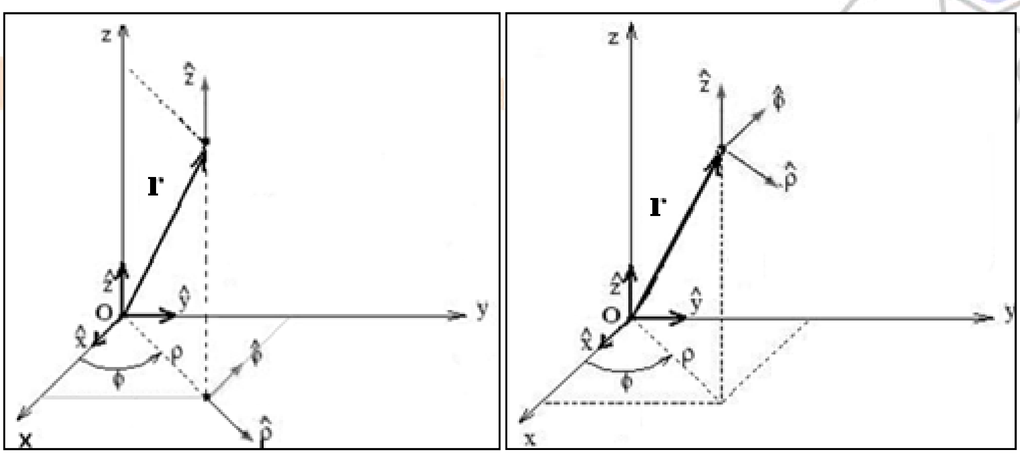
$$d\boldsymbol{a} = dy\,dz\,\hat{x}$$

$$d\boldsymbol{a} = dx\,dz\,\hat{y}$$



دستگاه مختصات استوانه ای

هر نقطه در این دستگاه با (ρ, φ, z) مشخص می شود. در این دستگاه ρ فاصله شعاعی از محور z ها یا شعاع استوانه ای است که از نقطه مورد نظر می گذرد، φ زاویه سمتی است که از سوی مثبت محور x در صفحه xy(به صورت پاد ساعتگرد در دید از بالا) اندازه گیری می شود و z فاصله نقطه تا صفحه xy است. بردارهای یکه به وسیله $\hat{\rho}$و$\hat{\varphi}$و$\hat{z}$ مشخص می شوند. $\hat{\rho}$ در جهت افزایش ρ، $\hat{\varphi}$ در جهت افزایش φ و $\hat{z}$ در جهت افزایش z هستند.

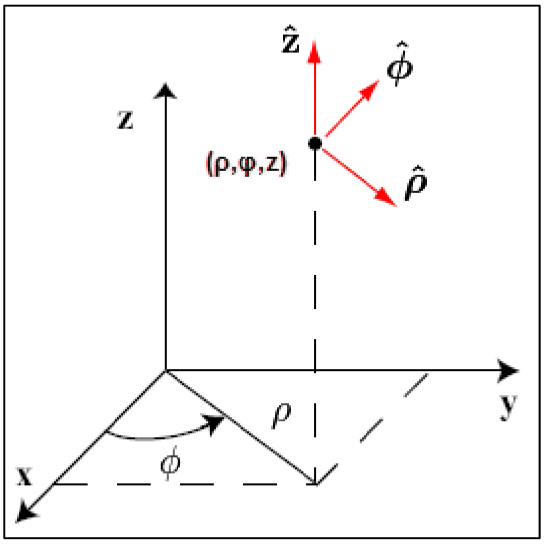


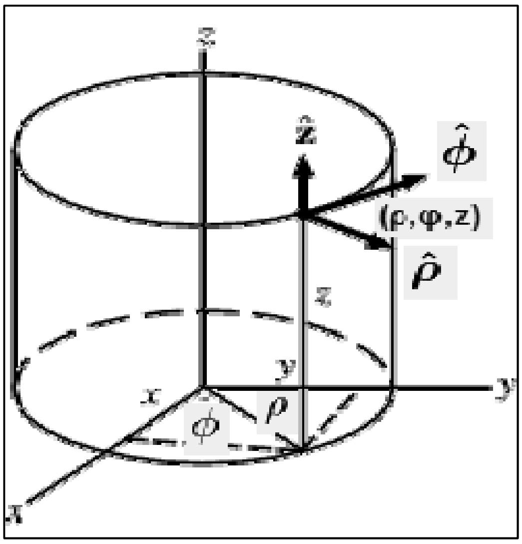
از آنجایی که انتقال بردارها مشروط بر حفظ اندازه و جهتشان در فضا آزاد است دو شکل بالا هم ارزند. بردار **A** در این دستگاه به صورت زیر نمایش داده می شود:

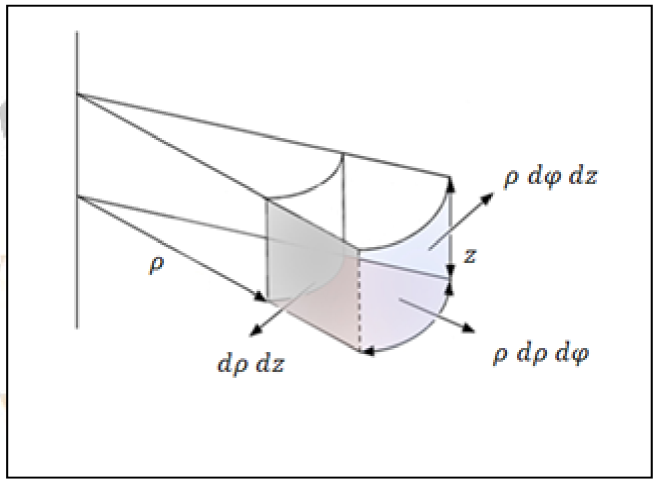
$$\mathbf{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z}$$

وبلاگ اختصاصی محمد جواد کاویانی
www.kavianinia.blogfa.com
mjknkaviany@gmail.com

تصاویر کمکی







بردار مکان $\mathbf{r}$ در دستگاه استوانه ای عبارت است از:

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

المان حجم در دستگاه استوانه ای عبارت است از:

$$dV = \rho d\rho\, d\varphi\, dz$$

المانهای سطح در این حالت عبارتند از:

$$d\boldsymbol{a} = \rho\, d\varphi\, dz\, \hat{\rho}$$

$$d\boldsymbol{a} = d\rho\, dz\, \hat{\varphi}$$

$$d\boldsymbol{a} = \rho d\rho\, d\varphi\, \hat{z}$$

رابطه بین بردارهای یکه در دستگاه استوانه ای و دکارتی به این شرح است:

وبلاگ اختصاصی محمد جواد کاویانی
www.kavianinia.blogfa.com
mjknkaviany@gmail.com

$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

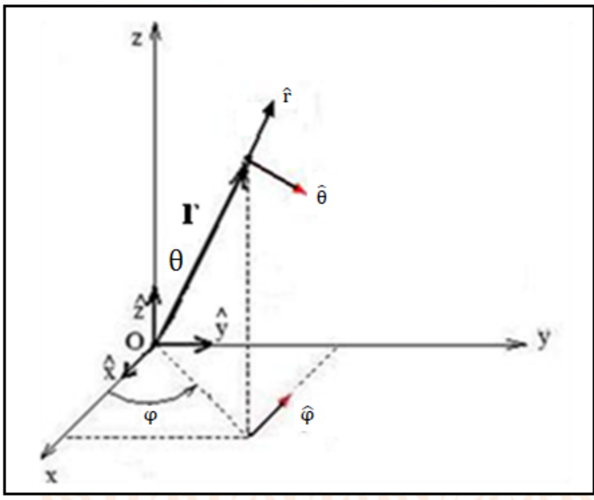
$$\hat{z} = \hat{z}$$

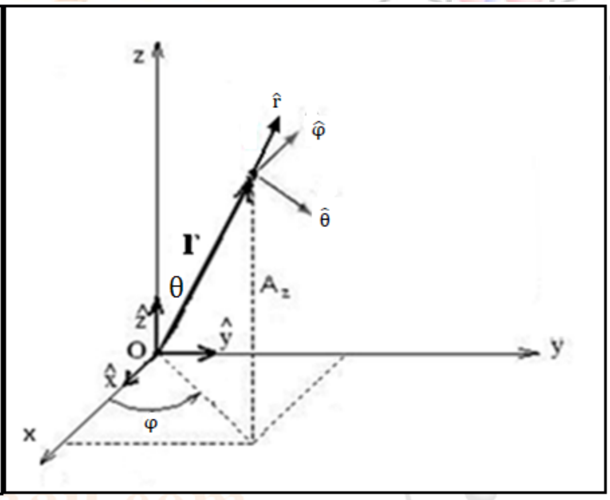
برای پوشش کامل فضا در این دستگاه حدود پارامترها عبارتند از:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{و} \quad (۰ \le \rho < \infty, ۰ \le \varphi \le ۲\pi, -\infty < z < \infty)$$

دستگاه مختصات کروی

هر نقطه در این دستگاه با (r,θ,φ) مشخص می شود. در این دستگاه r فاصله از مرکز تا نقطه مورد نظر یا شعاع کره ای است که از نقطه مورد نظر می گذرد، θ زاویه سمتی که از سوی مثبت محور z ها اندازه گیری می شود و φ زاویه سمتی است که از سوی مثبت محور x در صفحه xy(به صورت پاد ساعتگرد در دید از بالا) اندازه گیری می شود. در این دستگاه بردارهای یکه به وسیله $\hat{r}$و$\hat{\theta}$و$\hat{\varphi}$ مشخص می شوند. $\hat{r}$ در جهت افزایش r، $\hat{\theta}$ در جهت افزایش θ و $\hat{\varphi}$ در جهت افزایش φ هستند.

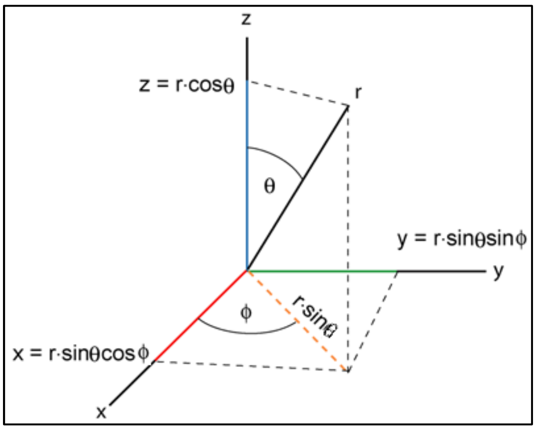


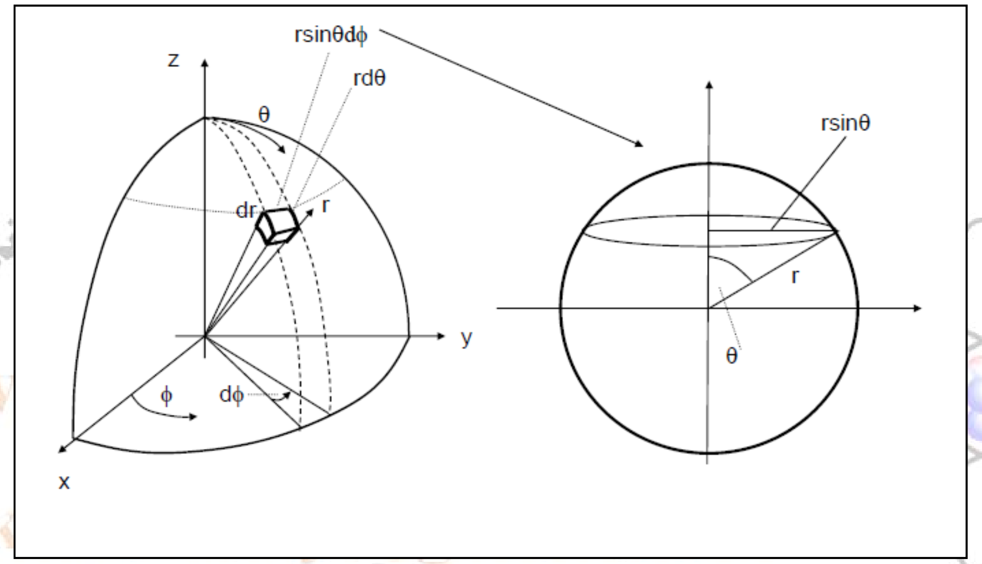


بردار **A** در این دستگاه به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\mathbf{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$$

تصاویر کمکی





بردار مکان **r** در دستگاه کروی عبارت است از:

$$\mathbf{r} = r\hat{r}$$

المان حجم دراین دستگاه عبارت است از:

$$dV = r^{2}\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

المانهای سطح در این دستگاه عبارتند از:

$$d\boldsymbol{a} = r^{2} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}$$

$$d\boldsymbol{a} = r \sin\theta\, dr\, d\varphi\, \hat{\theta}$$

$$d\boldsymbol{a} = r\, dr\, d\theta\, \hat{\varphi}$$

رابطه بین بردارهای یکه در دستگاه کروی و دکارتی به این شرح است:

$$\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\varphi + \hat{y}\cos\theta\sin\varphi - \hat{z}\sin\theta$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

برای پوشش کامل فضا در این دستگاه حدود پارامترها عبارتند از:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{و} \quad (0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 < \varphi < 2\pi)$$

مساله ها

۱- مساحت یک نیم دایره به شعاع a را با استفاده از انتگرال گیری به دست آورید.

۲- مساحت یک ربع دایره به شعاع a را با استفاده از انتگرال گیری به دست آورید.

۳- مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را با استفاده از انتگرال گیری به دست آورید.

۴- مساحت یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع a و b را با استفاده از انتگرال گیری به دست آورید.

۵- حجم یک کره به شعاع R را با انتگرال گیری به دست آورید.

۶- حجم یک نیم کره به شعاع R را با انتگرال گیری به دست آورید.

۷- حجم یک ربع کره به شعاع R را با انتگرال گیری به دست آورید.

۸- حجم یک استوانه به شعاع R و ارتفاع h را با انتگرال گیری به دست آورید.

۹- حجم یک نیم استوانه(استوانه ای که در راستای ارتفاع خود نصف شده است) به شعاع R و ارتفاع h را با انتگرال گیری به دست آورید.

۱۰- حجم یک مخروط به شعاع R و ارتفاع h را با انتگرال گیری به دست آورید.

۱۱-حجم یک هرم مربع القاعده که طول اضلاع قاعده آن a و ارتفاع آن h است را با استفاده از انتگرال گیری مستقیم به دست آورید.

۱۲- مساحت رویه یک کره به شعاع R را به دست آورید.

۱۳-مساحت کل یک استوانه به شعاع R و ارتفاع h را به دست آورید.

۱۴- مساحت جانبی مخروطی به شعاع a و ارتفاع h را به دست آورید.

۱۵- حجم یک مخروط ناقص به شعاعهای a(قاعده کوچک) و b (قاعده بزرگ) و ارتفاع h را به دست آورید.

جواب) $\frac{۱}{۳}\pi h(a^{۲} + b^{۲} + ab)$