

دانشکده مهندسی پزشکی	درس پدیده‌های بیوالکتریک	تفکر شماره ۱
دانشگاه صنعتی امیرکبیر		ارائه: دکتر مهرداد ساویز

تمارین فصل 1_ بردارها و میدان‌های برداری

1-1 بردارهای \bar{A} و \bar{B} به صورت زیر تعریف شده است و \bar{a}_x و \bar{a}_y و \bar{a}_z بردارهای واحد در محورهای مختصات X و Y و Z هستند:

$$\bar{A} = 1\bar{a}_x + 2\bar{a}_y + 3\bar{a}_z$$

$$\bar{B} = 4\bar{a}_x + 5\bar{a}_y$$

الف) حاصل ضرب داخلی دو بردار \bar{A} و \bar{B} را محاسبه کنید؟

ب) اندازه بردار \bar{A} چیست؟

پ) زاویه بین دو بردار \bar{A} و \bar{B} را بیابید؟ آیا دو بردار متعامد (عمود بر هم) هستند؟

ت) مساحت مثلث ایجاد شده از طریق \bar{A} و \bar{B} و برداری که نقاط انتهایی آنها را بهم وصل می‌کند چقدر است؟ (فرض کنید بردارها از مبدأ رسم شده اند) - راهنمایی: از ضرب خارجی استفاده کنید.

1-2 در محدوده صفر تا بی نهایت، Φ به صورت $\Phi = x^5$ داده شده است

الف) در نقطه $x=1$ مؤلفه X در گرادیان Φ چیست؟

ب) مؤلفه Y چیست؟

1-3 در محدوده صفر تا بی نهایت Φ به صورت $\Phi = x^7$ داده شده است. در نقطه $x=1$ مقدار لاپلاسین Φ چیست؟

1-4 تابع عددی $\Psi = x^2 yz$ را در نظر بگیرید.

الف) گرادیان تابع را بیابید.

ب) مشتق جهت‌دار Ψ را در جهت مشخص شده توسط بردار واحد زیر حساب کنید

$$3/\sqrt{50}\bar{a}_x + 4/\sqrt{50}\bar{a}_y + 5/\sqrt{50}\bar{a}_z$$

پ) مقدار مشتق را در نقطه (2,3,1) بیابید.

1-5 تابع برداری زیر را در نظر بگیرید.

$$\bar{A} = x^2\bar{a}_x + (xy)^2\bar{a}_y + 24x^2y^2z^3\bar{a}_z$$

الف) دیورژانس تابع را بیابید.

**** امتیازی:**

1-6 اگر \mathbf{R} به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

الف: آیا $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$ ؟

ب: برای هر $f(\mathbf{R})$ ، $\nabla(f(\mathbf{R})) = -\nabla'(f(\mathbf{R}))$ برقرار است؟

تمارین فصل 2_ منابع و میدانها

پیش فرضها: محیط رسانا یکپارچه و همگن و نامحدود است. مقدار رسانایی برابر با $\sigma = 0.01 \text{ S/cm}$ و $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ است.

1-2 در محیط همگن پتانسیل با واحد میلی ولت به صورت زیر داده شده است:

$$\Phi = k(xy + z^2)$$

اگر K دارای مقدار ثابت 1 باشد و مقدار رسانایی برابر با $\sigma = 0.2 \text{ S/cm}$:

الف) یک عبارت به همراه واحدها برای چگالی جریان \vec{J} بنویسید؟

ب) دامنه \vec{J} را در $x=1$ و $y=2$ و $z=3$ سانتی متر مشخص کنید؟

2-2 فرض کنید پتانسیل Φ به صورت زیر و بر حسب میلی ولت تعریف شده باشد:

$$\Phi = k(x^3 - x^2)$$

که در آن بر حسب سانتی متر و $k = 1 \text{ mV/cm}$ است. مقدار x ای را بیابید که در آن چگالی بار خالص برابر صفر است.

3-2 یک منبع جریان نقطه ای در مختصات $(1, 0, -1)$ ، سانتی متر دارای قدرت 1 میلی آمپر و محیط هادی با مقاومت 100 اهم، سانتی متر

است:

الف) مقدار پتانسیل در نقطه $(3, 2, 2)$ چیست؟ (با واحدها)

ب) چگالی جریان در این نقطه چیست؟ (با واحدها)

4-2 بردارهای هندسی \vec{U} و \vec{V} و چگالی جریان \vec{J} ($\mu\text{A/cm}^2$) به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\vec{J} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 4\vec{a}_z$$

$$\vec{U} = 3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y$$

$$\vec{V} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_z$$

الف) دامنه چگالی جریان را محاسبه کنید؟

ب) ناحیه ی برداری مثلث ساخته شده از دو بردار \vec{U} و \vec{V} به صورتی که دو ابتدای آن ها به هم متصل شود و ضلع سوم حاصل از اتصال دو

انتهای آن ها باشد را بیابید؟

پ) جریان کل عبوری از سطح این مثلث چیست؟

5-2 آیا رسانایی در یک محیط همگن و غیر فعال می تواند منفی باشد؟ چرا؟

6-2 چشمه های نقطه ای 8mA و -8mA در $z=2\text{mm}$ روی محور z و $y=-2\text{mm}$ روی محور y قرار دارند. در $(4, 0, 0)$ پتانسیل Φ_1

و چگالی جریان J_1 برای محیطی با مقاومت ویژه $100 \Omega\text{cm}$ محاسبه شده است. با مقاومت ویژه دوبرابر یعنی $(200 \Omega\text{cm})$ ، پتانسیل

Φ_2 و چگالی جریان J_2 برای همان نقطه به دست آمده است.

الف: نسبت $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ ؟

ب: نسبت J_2/J_1 ؟

7-2 فرض کنید پتانسیل Φ با واحد mV به صورت زیر داده شده است:

$$\Phi = k(x^3)$$

که در آن x بر حسب cm ، k ثابتی با اندازه ی 1 و واحد مناسب اند. در محدوده ی $-2 < x < 2$:

الف: واحد مناسب برای k چیست؟

ب: چه عبارتی میدان الکتریکی بر حسب x را به دست می دهد؟

پ: چه عبارتی چگالی منبع جریان را بر حسب x به دست می دهد؟

ت: معنی قسمت "پ" را تفسیر کنید. (منبعی وجود دارد؟ اگر بله، در کجا؟)

2-8 دو منبع نقطه‌ای دارای دامنه $+I_0$ و $-I_0$ هستند و به ترتیب در مختصات $(0,0,1)$ و $(0,0,-1)$ قرار گرفته‌اند. مقدار I_0 برابر با 1 نانوآمپر و رسانایی برابر $\sigma=0.01 \text{ S/cm}$ است.

الف: پتانسیل حاصل از برابند پتانسیل هر تک قطبی در نقطه $(5,0,0)$ چیست؟

ب: منبع به صورت یک بردار دو قطبی چیست؟

پ: برداری که وسط دو قطبی را به نقطه‌ی $(5,0,0)$ وصل می‌کند را به دست آورید.

ت: پتانسیل ناشی از دو قطبی در نقطه‌ی $(5,0,0)$ سانتی‌متر چقدر است؟

2-9 با توجه به هندسه‌ی شکل 2.7 کتاب و مقادیر تعیین شده‌ی

$$R_i=100\Omega\text{cm}, R_e=400\Omega\text{cm}, a=10\mu\text{m}, b=20\mu\text{m}, L=100\mu\text{m}, R_m=10000\Omega\text{cm}^2, C_m=1.2\mu\text{F/cm}^2$$

در راستای محور X به دست آورید:

الف: مقاومت در واحد طول جعبه‌ی کوچک (r_i)

ب: مقاومت واحد طول جعبه‌ی بزرگ (r_e)

پ: مقاومت واحد طول غشا (r_m)

ت: خازن واحد طول غشا (C_m)

2-10 فرض کنید جعبه‌ی کوچک با غشا به صورت ایزوله احاطه شده است. ولتاژ 100mV به دو سر صفحات موازی (یکی در زیر جعبه و دیگری بالای جعبه) اعمال شده است. اندازه گیری‌های جعبه به صورت زیر است:

$$R_i=100\Omega\text{cm}, R_e=400\Omega\text{cm}, a=10\mu\text{m}, b=20\mu\text{m}, L=100\mu\text{m}, R_m=10000\Omega\text{cm}^2, C_m=1.2\mu\text{F/cm}^2$$

هر دو صفحه خارج غشا هستند ولی در تماس مناسبی با آن قرار دارند. جریان حالت مانا را به دست آورید.